19/03/2018

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ εκθετικής τάξης α. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,c]$, $c>0$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ υπάρχει για $s>\alpha$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Επειδή η f είναι εκθετικής τάξης α, υπάρχουν M, t_0 τέτοια ώστε

$|f(t)| \leq M \cdot e^{at}$, $\forall\, t \geq t_0 > 0$

Έστω ένα $s>\alpha$ τότε στο $[0,t_0]$ η e^{-st} ολοκληρώσιμη και η f επίσης ολοκληρώσιμη, οπότε για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ πρέπει να συγκλίνει το

$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ Όμως $|e^{-st} f(t)| = e^{-st}|f(t)| \leq e^{-st} \cdot M \cdot e^{at} =$

$M e^{-(s-\alpha)t}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω ότι η f είναι εκθετικής τάξης α, υπάρχουν M, t_0 τέτοια ώστε

$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, $\forall\, t \geq t_0 \geq 0$

Έστω ένα $s > \alpha$ τότε στο $[0, t_0]$ η e^{-st} ολοκληρώσιμη και η f επίσης ολοκληρώσιμη, οπότε για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$ πρέπει να συγκλίνει το $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$. Όμως $|e^{-st} f(t)| = e^{-st} |f(t)| \leq e^{-st} \cdot M \cdot e^{\alpha t} =$

$= M e^{-(s-\alpha)t}$

αν $\delta = s - \alpha$ τότε $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt \leq \lim_{k \to +\infty} \int_{t_0}^{k} e^{-\delta t} dt$

Όμως,

$$\int_{t_0}^{k} e^{-\delta t} dt = \left[-\frac{1}{\delta} e^{-\delta t} \right]_{t_0}^{k} = -\frac{1}{\delta} e^{-\delta k} + \frac{1}{\delta} \cdot e^{-\delta t_0}$$

Άρα,

$$\int_{t_0}^{k} e^{-\delta t} dt = \frac{1}{\delta} e^{-\delta t_0}$$

Άρα, $\int_{t_0}^{+\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt < +\infty$, οπότε και $\int_{t_0}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt < +\infty$.

Σημείωση: Η υπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,b]$, $b>0$ ικανοποιείται όταν η f είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε τέτοιο διάστημα

- Λόγω αυτού έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ: Εάν η f είναι εκθετικής τάξης α και η f είναι κατά τμήματα συνεχής επί κάθε διαστήματος της μορφής $[0,b]$, $b>0$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace της f, $\mathcal{L}\{f(t)\}$ υπάρχει για $s>\alpha$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου)
Έστω $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ και εκθετικής τάξης α. Εάν η f' είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,b]$, $b>0$ τότε $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$, $s>\alpha$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή η f' είναι κατά τμήματα συνεχής στο $[0,k]$, $k>0$ έπεται ότι είναι και ολοκληρώσιμη στο $[0,k]$ οπότε

$$\int_0^k e^{-st} f'(t)\,dt = \left[e^{-st} f(t)\right]_0^k - \int (-s) e^{-st} f(t)\,dt =$$

$$= e^{-sk} f(k) - e^{0} f(0) + s\int_0^k e^{-st} f(t)\,dt$$

Όμως η f είναι εκθετικής τάξης α συνεπώς για $s>\alpha$ έχουμε

$$\lim_{k\to+\infty} e^{-sk} f(k) \le \lim_{k\to+\infty} e^{-sk} M\cdot e^{\alpha k} = \lim_{k\to+\infty} M\cdot e^{\overset{<0}{(\alpha-s)}k} = 0$$

οπότε $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^k e^{-st} f'(t)\,dt = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$, $s>\alpha$

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f η οποία ορίζεται και έχει παραγώγους έως n-τάξης στο σύνολο $[0,+\infty)$. Έστω, επίσης ότι οι συναρτήσεις $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ είναι εκθετικής τάξης α και η $f^{(n)}$ είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,b]$, $b>0$. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ υπάρχει για $s>\alpha$ και ισχύει $\mathcal{L}\{f(t)\} = s^n\mathcal{L}\{f(t)\} - \{s^{n-1} f(0) + s^{n-2} f'(0) + \dots$
$\dots + s f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\}$.

Απόδειξη: ο τύπος αποδεικνύεται επαγωγικά.

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα το συμπέρασμα ισχύει για $n=1$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $n=k$.

Δηλαδή $\mathcal{L}\{f^{k}(t)\} = s^{k}\mathcal{L}\{f(t)\} - \{s^{k-1}f(0) + s^{k-2}f'(0) + \dots + s f^{(k-2)}(0) + f^{(k-1)}(0)\}$ (*)

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$.

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα στην $f^{(k)}$ έχουμε

$$\mathcal{L}\{f^{(k+1)}(t)\} = s\cdot\{\mathcal{L}\{f^{k}(t)\} - f^{k}(0) =$$

$$\overset{(*)}{=} s\cdot\{s^{k}\mathcal{L}\{f(t)\} - \{s^{k-1}f(0) + s^{k-2}f'(0) + \dots + s\cdot f^{(k-2)}(0) + f^{k-1}(0)\}\} - f^{k}(0) =$$

$$= s^{k+1}\mathcal{L}\{f(t)\} - \{s^{k}f(0) + s^{k-1}f'(0) + \dots + s^{2}\cdot f^{(k-2)}(0) + s f^{(k-1)}(0) - f^{k}(0)\}$$

Άρα, το συμπέρασμα ισχύει για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

Θεώρημα: Έστω f πραγματική συνάρτηση εκθετικής τάξης α και f κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,b]$, $b>0$ τότε η

$$g(t) = \int^{t} f(x)\,dx \quad , t\geq 0$$

Scanned by CamScanner

Θεώρημα: Έστω f πραγματική συνάρτηση εκθετικής τάξης α και f κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής $[0,b]$, $b>0$ τότε η

$$g(t)=\int_0^t f(x)\,dx \quad , t\geq 0$$

είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ και εκθετικής τάξης. Αν $\alpha>0$ τότε η g είναι εκθετικής τάξης α. Εάν $\alpha<0$ τότε η g είναι εκθετικής τάξης 0 (και αν $\alpha=0$ τότε η g είναι εκθετικής τάξης γ για κάθε $\gamma>0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή η f είναι κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα $[0,b]$, $b>0$ είναι και ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[0,b]$, $b>0$. Οπότε η g είναι συνεχής στο $[0,b]$. Θα δείξουμε ότι η g είναι εκθετικής τάξης.

Πράγματι επειδή η f είναι εκθετικής τάξης α, έπεται ότι υπάρχουν M και $t_1>0$ τέτοια ώστε

$$|f(t)|\leq M\cdot e^{\alpha t}, \quad \forall t\geq t_1$$

Στο διάστημα $[0,t_1]$ η f είναι ολοκληρώσιμη άρα είναι και φραγμένη, συνεπώς υπάρχει M_1 τέτοιο ώστε $|f(t)|\leq M_1 \quad \forall t: 0\leq t\leq t_1$

Για $t\geq t_1$ έχουμε

$$g(t)=\underbrace{\int_0^{t_1} f(x)\,dx}_{c} + \int_{t_1}^{t} f(x)\,dx = c+\int_{t_1}^{t} f(x)\,dx$$

Scanned by CamScanner

Άρα $|g(t)| \le |c| + \int_{t_1}^{t} |f(x)|dx \le |c| + \int_{t_1}^{t} M e^{ax} dx$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

Περίπτωση 1:

Εάν $a>0$ τότε για $t>t_1$ έχουμε $|g(t)| \le |c| + \frac{M}{a}\int_{t_1}^{t} (e^{ax})' dx =$

$$= |c| + \frac{M}{a}(e^{at} - e^{at_1}) \le |c| + \frac{M}{a} \cdot e^{at} \le |c| e^{at} + \frac{M}{a} e^{at} =$$

$$= e^{at}\underbrace{\left(|c| + \frac{M}{a}\right)}_{M'}$$

Άρα σε αυτή τη περίπτωση η g εκθετικής τάξης a.

Περίπτωση 2:

Εάν $a<0$ τότε για $t>t_1$ έχουμε

$$|g(t)| \le |c| + \frac{M}{a}(e^{at} - e^{at_1}) \le |c| e^{0} - \frac{M}{a} e^{at_1} + \frac{M}{a} e^{at}$$

Περίπτωση 2:

Εάν $a<0$ τότε για $t>t_1$ έχουμε

$$|g(t)| \le |c| + \frac{M}{a}\left(e^{at} - e^{at_1}\right) \le |c|\, e^{0} - \frac{M}{a} e^{at_1} + \frac{M}{a} e^{at}$$

$a<0$

$$\le |c|e^{0t} - \frac{M}{a} e^{at_1} \le |c|e^{0t} - \frac{M}{a} e^{0t} = \left(|c| - \frac{M}{a}\right)e^{0t}$$

Άρα σε αυτή τη περίπτωση g εκθετικής τάξης 0

Περίπτωση 3:

Εάν $a=0$ τότε για $t>t_1$ έχουμε

$$|f(t)| \le M \cdot e^{0t} = M$$

Επίσης, $|f(t)| \le M_1$ για $t \in [0, t_1]$

Οπότε εάν $M_2 = \max\{M, M_1\}$ τότε για $t \ge 0$ έχουμε $|f(t)| \le M_2$ $\forall t \ge 0$

Επομένως για $t \ge 0$ έχουμε $|g(t)| \le \int_0^t M_2 \, dx = M_2 \cdot t$

Αλλά έχουμε δείξει ότι $h(t)=t$ είναι εκθετικής τάξης γ (για κάθε $\gamma>0$)

άρα

$$|g(t)| \le \underbrace{M_2 \cdot M_3}_{M''} e^{\gamma t}$$

Άρα η g είναι εκθετικής τάξης α (για κάθε $s>0$)

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Έστω $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και εκθετικής τάξης a. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = \int_0^t f(x)\,dx$, $t > 0$

Αν $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ τότε υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της g και $\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$, $s > \alpha = \max\{a, 0\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Εφόσον η f είναι συνεχής η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη. Επιπλέον (σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα) είναι και εκθετικής τάξης. Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της g υπάρχει

α' τρόπος:

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - 0$

[illegible] $s > \alpha = \max\{a, 0\}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Επειδή η f ρητά συνεχής η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη. Επιπλέον [illegible] με το παραγωγίσιμο [illegible] είναι και εκθετικής τάξης. Επομένως ο μετασχηματισμός Laplace της g υπάρχει.

α' τρόπος:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = s\cdot \mathcal{L}\{g(t)\} - 0$$

Επομένως για $s > s_0 = \max\{a, 0\}$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s} F(s)$$

β' τρόπος

$$\int_0^k e^{-st} g(t)dt = \int_0^k \left[-\frac{1}{s} e^{-st}\right]' g(t)dt = -\frac{1}{s} e^{-sk} g(k) + \frac{1}{s} e^{0} g(0) +$$

$$+ \int_0^k \frac{1}{s} e^{-st} g'(t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-sk} g(k) + \frac{1}{s} \int_0^k e^{-st} f(t)dt$$

Εφαρμογές θεωρημάτων:

(1) Παράδειγμα για τον υπολογισμό μετασχ. Laplace της $f(t)=t^n$ όπου $n\in\mathbb{N}$

Η $f(t)=t^n$ είναι εκθετικής τάξης α για κάθε $\alpha>0$

Η f έχει παραγώγους τουλάχιστον n-τάξης και $f', f'', f''', \dots, f^{(n-1)}$ είναι εκθετικής τάξης α (για κάθε $\alpha>0$)

Επομένως

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \{s^{n-1}f(0) + s^{n-2}f'(0) + \dots + s f^{(n-2)}(0) + f^{(n-1)}(0)\}$$

Όμως $f'(t) = n\cdot t^{n-1}$

$f''(t) = n(n-1)t^{n-2}$

$\vdots$

$f^{(n-1)}(t) = n(n-1)\dots 2t$

Συνεπώς

$f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$ και $f^{(n)}(t)=n!$

Άρα από τον τύπο του μετασχ. Laplace της n-οστής παραγώγου

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\}$$

αλλά $\mathcal{L}\{c\} = \dfrac{c}{s}$, $s>0$ οπότε $\mathcal{L}\{n!\} = \dfrac{n!}{s}$, $s>0$

Συνεπώς

$f(0)=f'(0)=\dots=f^{(n-1)}(0)=0$ και $f^{(n)}(t)=n!$

Άρα από τον τύπο του μετασχ. Laplace της n-οστής παραγώγου

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\,\mathcal{L}\{f(t)\}$$

αλλά $\mathcal{L}\{c\}=\frac{c}{s}$, $s>0$ οπότε $\mathcal{L}\{n!\}=\frac{n!}{s}$, $s>0$

Άρα $\mathcal{L}\{f(t)\}=\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=\frac{1}{s^n}\cdot\frac{n!}{s}=\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s>0$

(2) Εφαρμογή τύπου ολοκληρώματος

Να υπολογιστεί $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos 3x\,dx\right\}$

ΛΥΣΗ:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(x)\,dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

$\mathcal{L}\{\cos t\}=\frac{s}{s^2+1}$, $s>0$

$\mathcal{L}\{\cos 3t\}=\frac{1}{3}\,\frac{\left(\frac{s}{3}\right)}{\left(\frac{s}{3}\right)^2+1}=\frac{s}{s^2+9}$, $s>0$

Συνεπώς, $\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos 3x\,dx\right\}=\frac{1}{s}F(s)=\frac{1}{s}\cdot\frac{s}{s^2+9}=\frac{1}{s^2+9}$, $s>0$.

Scanned by CamScanner

ΘΕΩΡΗΜΑ (Χ.Α) Πολλαπλασιασμός με δύναμη του t

Έστω $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα $[a,b]$, $b>0$ και εκθετικής τάξης a. Εάν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s>a$ τότε ο μετασχηματισμός Laplace της

$$\mathcal{L}\{t^{\nu} f(t)\} = (-1)^{\nu} \frac{d^{\nu}}{ds^{\nu}} F(s) \quad , s>a \text{ και } \nu \in \mathbb{N}$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t) = t^2 \cos 3t$, $t \geq 0$

Λύση:

Έχουμε: $\mathcal{L}\{\cos 3t\} = \dfrac{s}{s^2+9}$, $s>0$

οπότε $\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = (-1)^2 \dfrac{d^2}{ds^2} \left(\dfrac{s}{s^2+9} \right) = \dfrac{d^2}{ds^2} \left(\dfrac{s}{s^2+9} \right) = \ldots\ldots$

$\dfrac{d}{ds} \left(\dfrac{s}{s^2+9} \right) = \ldots$

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\quad}{s^2+9}\right)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\quad\right) = \ldots\ldots$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (Χ.Α)

Έστω $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κατά τμήματα συνεχής σε κάθε διάστημα $[0,b]$, $b>0$ και εκθετικής τάξης a.

Εάν $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $s>a$ και το $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^{+\infty} F(u)\,du$ όπου $s>a$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί αν υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $f(t) = \frac{\sin t}{t}$

Λύση: $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$.

Επιπλέον η $g(t) = \sin t$ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$

και είναι και φραγμένη $|g(t)| \le 1 = e^0$ (άρα είναι εκθετικής τάξης 0)

Έπειτα κάνοντας χρήση του προηγούμενου θεωρήματος

$$\mathcal{L}\{\sin t/t\} = \int_s^{+\infty} \mathcal{L}\{\sin t\}(u)\,du = \int_s^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \int_s^{k} \frac{1}{u^2+1}\,du = \dots = \frac{\pi}{2} - \arctan s$$

Παράδειγμα: Να δείξετε ότι $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\log\frac{s+1}{s-1}$, $s>1$

Λύση:

$$f(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^t - \frac{1}{e^t}\right)$$

και $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} f(t) = \frac{1}{2}$

Άρα, είναι εκθετικής τάξης 1

Επίσης, $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{\sinh t}{t} = \lim\limits_{t\to0^+} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{t\to0^+} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1$

άρα το όριο υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Άρα, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $\frac{\sinh t}{t}$

Άρα, είναι εκθετικής τάξης 1

Επίσης, $\lim_{t\to 0^+} \frac{\sinh t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1$

άρα το όριο υπάρχει και είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Άρα, υπάρχει ο μετασχηματισμός Laplace της $\frac{\sinh t}{t}$ και

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u)\,du \quad \text{όπου } F(s) = \mathcal{L}\{\sinh t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right\} =$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{e^t}{2}\right\} - \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-t}}{2}\right\} =$$

$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\}$. Όμως $\mathcal{L}\{e^t\} = \frac{1}{s-1}$, $s>1$

$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \mathcal{L}\{e^{at}\cdot 1\} = \frac{1}{s-a}$, $s>a$ $\quad \mathcal{L}\{f(t)\,e^{at}\} = F(s-a)$

Οπότε $\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{s+1}$, $s>1$. Οπότε $\mathcal{L}\{\sinh t\} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1}$, $s>1$

Άρα, $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}(s) = \int_s^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1}\right) du$

Όμως, για $k>s>1$ έχουμε: $\int_s^k \frac{1}{u-1}\,du = \left[\log|u-1|\right]_s^k = \log\frac{|k-1|}{|s-1|}$